# ECONOMETRIA

## Análise de Regressão com Séries Temporais

Teoria e Exemplos

Esmeralda A. Ramalho

# Análise de Regressão Básica

Dados temporais: registo de uma ou mais variáveis ao longo do tempo para um individuo, empresa, região ou país, …

Exemplo: para um país, tem-se a taxa de desemprego e a taxa de inflação ao longo de n anos

Wooldridge (2016)

**TABLE 10.1 Partial Listing of Data on U.S. Inflation and Unemployment Rates, 1948–2003**

| Year | Inflation | Unemployment |
|---|---|---|
| 1948 | 8.1 | 3.8 |
| 1949 | −1.2 | 5.9 |
| 1950 | 1.3 | 5.3 |
| 1951 | 7.9 | 3.3 |
| . | . | . |
| . | . | . |
| . | . | . |
| 1998 | 1.6 | 4.5 |
| 1999 | 2.2 | 4.2 |

# Análise de Regressão Básica

Características dos dados:

- Os valores passados da variável influenciam o presente e futuro, pelo que não há independência ao longo do tempo
- Apenas há uma amostra possível de recolher, num dado horizonte temporal

A sequência de variáveis aleatórias indexadas pelo tempo t, $t = 1, \dots n$, designa-se de processo estocástico, $\{x_t\}$, sendo a sua realização designada de série temporal $x_t$

## Modelo estático

y, num dado período, é influenciado apenas por variáveis explicativas desse período:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + u_t$$

- Modelo adequado para casos em que uma variação de x provoca apenas um efeito imediato sobre y

- Efeito parcial:

$$\Delta x_t = 1 \rightarrow \Delta y_t = \beta_1$$

## Modelo FDL(q)

y, num dado período, é influenciado por variáveis explicativas desse período e de períodos passados:

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_t + \alpha_2 x_{t-1} + \cdots + \alpha_{q+1} x_{t-q} + u_t$$

onde q define o número de lags ou desfasamentos a incluir

- Reduz-se ao modelo estático para $\alpha_2 = \cdots = \alpha_{q+1} = 0$

- Efeitos parciais
  - Multiplicador/propensão de impacto: $\alpha_1$, impacto imediato em y de uma variação unitária em x no momento t
  - Multiplicador/propensão de longo prazo: $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{q+1}$, impacto de longo prazo em y de uma variação permanente em x

# Modelos estáticos e modelos de desfasamentos distribuidos

Considere-se o modelo FDL(2)

$$y_t = \alpha_0 + \delta_0 z_t + \delta_1 z_{t-1} + \delta_2 z_{t-2} + u_t$$

1. Assume-se que z tem o nível c, exceto em t, onde aumentou 1 unidade, tendo depois voltado ao nível c: $z_t = c + 1$ e … $z_{t+2} = z_{t+1} = z_{t-1} = z_{t-2} = \cdots = c$

$$y_{t-1} = \alpha_0 + \delta_0 c + \delta_1 c + \delta_2 c$$
$$y_t = \alpha_0 + \delta_0 (c+1) + \delta_1 c + \delta_2 c$$
$$y_{t+1} = \alpha_0 + \delta_0 c + \delta_1 (c+1) + \delta_2 c$$
$$y_{t+2} = \alpha_0 + \delta_0 c + \delta_1 c + \delta_2 (c+1)$$
$$y_{t+3} = \alpha_0 + \delta_0 c + \delta_1 c + \delta_2 c$$

O aumento em t de z afectou y por 3 períodos

- $y_t - y_{t-1} = \delta_0$ (impacto imediato)
- $y_{t+1} - y_{t-1} = \delta_1$
- $y_{t+2} - y_{t-1} = \delta_2$
- $y_{t+3} - y_{t-1} = 0$ (o impacto já não se faz sentir)

# Modelos estáticos e modelos de desfasamentos distribuidos

2. Assume-se que z tem o nível c antes de t e c+1 em t e após:

$z_t = z_{t+1} = z_{t+2} \ldots = c + 1$ e $z_{t-1} = z_{t-2} = \cdots = c$

$$y_{t-1} = \alpha_0 + \delta_0 c + \delta_1 c + \delta_2 c$$
$$y_t = \alpha_0 + \delta_0 (c+1) + \delta_1 c + \delta_2 c$$
$$y_{t+1} = \alpha_0 + \delta_0 (c+1) + \delta_1 (c+1) + \delta_2 c$$
$$y_{t+2} = \alpha_0 + \delta_0 (c+1) + \delta_1 (c+1) + \delta_2 (c+1)$$

O aumento em t de z afecta todos os períodos

- Para um horizonte h, a alteração no valor esperado de y decorrente de um aumento permanente em x de 1 unidade é $\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_h$
- No longo prazo, a alteração no valor esperado de y decorrente de um aumento permanente em x de 1 unidade é $\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_q$: o multiplicador de longo prazo

# Modelos estáticos e modelos de desfasamentos distribuidos

## Outros aspectos

- Modelo com vários regressores:

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_{t1} + \alpha_2 x_{t-1,1} + \alpha_3 x_{t2} + \alpha_4 x_{t-1,2} + u_t$$

| | $x_1$ | $x_2$ |
|---|---|---|
| P. impacto | $\alpha_1$ | $\alpha_3$ |
| P. longo prazo | $\alpha_1 + \alpha_2$ | $\alpha_3 + \alpha_4$ |

- Intervalo de confiança para $\alpha_{PLP} = \alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_{q+1}$ no modelo

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 x_t + \alpha_2 x_{t-1} + \cdots + \alpha_{q+1} x_{t-q} + u_t$$

  - Fazendo $\alpha_1 = \alpha_{PLP} - \alpha_2 - \cdots - \alpha_{q+1}$ e substituindo

$$y_t = \alpha_0 + \left(\alpha_{PLP} - \alpha_2 - \cdots - \alpha_{q+1}\right) x_t + \alpha_2 x_{t-1} + \cdots + \alpha_{q+1} x_{t-q} + u_t$$

$$y_t = \alpha_0 + \boldsymbol{\alpha_{PLP}} x_t + \alpha_2 (x_{t-1} - x_t) + \cdots + \alpha_{q+1} \left(x_{t-q} - x_t\right) + u_t$$

# Modelos estáticos e modelos de desfasamentos distribuidos

Exemplo: considere um conjunto de dados contendo observações anuais entre 1948 e 1996 relativas às variáveis *jbt* (taxa de juro dos bilhetes do tesouro a 3 meses), *inf* (taxa de inflação anual baseada no índice de preços no consumidor (IPC)), e *def* (défice governamental como percentagem do PIB). Pretende-se modelar jbt em função das outras duas variáveis

## Modelo estático

```
. regress jbt inf def
      Source |       SS             df       MS      Number of obs   =        49
-------------+----------------------------------   F(2, 46)        =     52.78
       Model |  294.032897         2  147.016449   Prob > F        =    0.0000
    Residual |  128.133943        46  2.78552049   R-squared       =    0.6965
-------------+----------------------------------   Adj R-squared   =    0.6833
       Total |   422.16684        48   8.7951425   Root MSE        =     1.669
------------------------------------------------------------------------------
         jbt |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
         inf |   .6131825   .0757753     8.09   0.000     .4606547    .7657104
         def |   .7004054     .11807     5.93   0.000     .4627427     .938068
       _cons |   1.252032   .4416346     2.83   0.007     .3630674    2.140996
------------------------------------------------------------------------------
```

## Modelo FDL

```
. gen inf1=inf[_n-1]
(1 missing value generated)
. gen def1=def[_n-1]
(1 missing value generated)

. reg jbt inf inf1 def def1
      Source |       SS             df       MS      Number of obs   =        48
-------------+----------------------------------   F(4, 43)        =     28.23
       Model |  293.744219          4  73.4360548   Prob > F        =    0.0000
    Residual |  111.851763         43  2.60120379   R-squared       =    0.7242
-------------+----------------------------------   Adj R-squared   =    0.6986
       Total |  405.595982         47  8.62970175   Root MSE        =    1.6128
------------------------------------------------------------------------------
         jbt |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
         inf |   .4251947   .1288993     3.30   0.002     .1652445    .6851449
        inf1 |   .2732321   .1412654     1.93   0.060    -.0116568     .558121
         def |   .1630251   .2569521     0.63   0.529    -.3551682    .6812185
        def1 |   .4047177    .217547     1.86   0.070    -.0340078    .8434431
       _cons |   1.234579   .4410125     2.80   0.008     .3451928    2.123966
------------------------------------------------------------------------------
```

# Modelos estáticos e modelos de desfasamentos distribuidos

ou

```
. tsset ano
        time variable:  ano, 1948 to 1996
                delta:  1 unit

. reg jbt inf L.inf def L.def
      Source |       SS           df       MS      Number of obs   =        48
-------------+----------------------------------   F(4, 43)        =     28.23
       Model |  293.744219         4  73.4360548   Prob > F        =    0.0000
    Residual |  111.851763        43  2.60120379   R-squared       =    0.7242
-------------+----------------------------------   Adj R-squared   =    0.6986
       Total |  405.595982        47  8.62970175   Root MSE        =    1.6128
------------------------------------------------------------------------------
         jbt |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
         inf |
         --. |   .4251947   .1288993     3.30   0.002     .1652445    .6851449
         L1. |   .2732321   .1412654     1.93   0.060    -.0116568     .558121
             |
         def |
         --. |   .1630251   .2569521     0.63   0.529    -.3551682    .6812185
         L1. |   .4047177    .217547     1.86   0.070    -.0340078    .8434431
             |
       _cons |   1.234579   .4410125     2.80   0.008     .3451928    2.123966
------------------------------------------------------------------------------
```

# Modelos estáticos e modelos de desfasamentos distribuidos

Modelos estimados

$$\widehat{juro}_t = 1.252 + 0.613 inf_t + 0.700 def_t$$

$$\widehat{juro}_t = 1.235 + 0.425 inf_t + 0.273 inf_t + 0.163 def_t + 0.405 def_{t-1}$$

Propensão de impacto para a inflação:

- Modelo estático: 0.613
- Modelo FDL: 0.425

Propensão de longo prazo para a inflação:

- Modelo estático: 0.613
- Modelo FDL: 0.425+0.272=0.698

# Escolha entre o modelo estático e o modelo FDL

## O modelo estático é re-estimado sem a primeira observação

```
. regress jbt inf def if ano>1948
      Source |       SS           df       MS      Number of obs   =        48
-------------+----------------------------------   F(2, 45)        =     51.57
       Model |  282.381685         2  141.190843   Prob > F        =    0.0000
    Residual |  123.214297        45  2.73809548   R-squared       =    0.6962
-------------+----------------------------------   Adj R-squared   =    0.6827
       Total |  405.595982        47  8.62970175   Root MSE        =    1.6547

------------------------------------------------------------------------------
         jbt |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
         inf |    .637288   .0772499     8.25   0.000     .4816987    .7928773
         def |   .6132833   .1338942     4.58   0.000     .3436065      .88296
       _cons |   1.367655   .4462745     3.06   0.004     .4688115    2.266498
------------------------------------------------------------------------------

. display ((0.7242-0.6962)/2)/((1-0.7242)/(48-5))
•   2.1827411
```

Não se rejeita Ho: os lags introduzidos não são estatisticamente relevantes

Intervalo de confiança para a propensão de longo prazo, $\theta$, a 95%

Modelo auxiliar

$$juro_t = \alpha_0 + \theta inf_t + \alpha_2(inf_{t-1} - inf_t) + \alpha_3 def_t + \alpha_4 def_{t-1} + u_t$$

```
. gen Dinf= inf1-inf
•   (2 missing values generated)
. reg  jbt inf  Dinf def def1
      Source |       SS            df       MS      Number of obs   =        48
-------------+----------------------------------   F(4, 43)        =     28.23
       Model |   293.74422          4  73.4360549   Prob > F        =    0.0000
    Residual |  111.851763         43  2.60120378   R-squared       =    0.7242
-------------+----------------------------------   Adj R-squared   =    0.6986
       Total |  405.595982         47  8.62970175   Root MSE        =    1.6128
------------------------------------------------------------------------------
         jbt |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
         inf |   .6984268   .0855166     8.17   0.000     .5259662    .8708874
        Dinf |   .2732321   .1412654     1.93   0.060    -.0116568     .558121
         def |   .1630251   .2569521     0.63   0.529    -.3551682    .6812185
        def1 |   .4047177    .217547     1.86   0.070    -.0340078    .8434431
       _cons |   1.234579   .4410125     2.80   0.008     .3451928    2.123966
------------------------------------------------------------------------------
```

# Hipóteses Clássicas e propriedades do OLS em pequenas amostras

1. Linearidade nos parâmetros: $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \cdots + \beta_k x_{tk} + u_t$ (pode incluir regressores desfasados, logaritmizados, quadráticos,…)
2. Ausência de colineariedade perfeita

3. Exogeneidade estrita: $E(u_t|X) = 0, \forall t \rightarrow Cov(x_{sj}, u_t) = 0\ \forall t, s, j$ (ausência de correlação de $u_t$ com qualquer uma das k variáveis explicativas, em t, no passado e no futuro)

- envolve exogeneidade contemporânea: $E(u_t|\boldsymbol{x}_t) = 0, \forall t \rightarrow Cov(x_{tj}, u_t) = 0$, ∀t,j (por exemplo, $y_{t-1}$ não é estritamente exógeno mas é contemporaneamente exógeno)
- falha em presença de variáveis omitidas (mesmo num FDL incluindo os lags adequados, pode ocorrer correlação com o futuro) , erro de medida, …

4. Homoscedasticidade: $Var(u_t|X) = Var(u_t) = \sigma^2$

5. Ausência de autocorrelação: $Corr(u_t, u_s|X) = 0, \forall t \neq s$

6. Normalidade do erro: $u_t \sim N(0, \sigma^2)$

| Propriedades |
|---|
| 1-3: estimadores centrados |
| 1-5 (pressupostos de Gauss-Markov): estimadores BLUE |
| 1-6: estimadores normalmente distribuídos $\hat{\beta}|X \sim N(\beta, \sigma^2(X'X)^{-1})$ e testes t e F e IC na forma standard |

# Exemplos de formas funcionais

As formas funcionais habituais com variáveis logaritmizadas, termos quadráticos, interaçoes e dummies aplicam-se, com adaptações obvias de interpretação

Exemplos

- $ln(y_t) = \alpha_0 + \alpha_1 x_t + \alpha_2 x_{t-1} + \cdots + \alpha_{q+1} x_{t-q} + u_t$
- $ln(y_t) \; = \alpha_0 + \alpha_1 x_{1t} + \alpha_2 x_{1t-1} + \alpha_3 x_{2t} + \alpha_4 x_{2t-1}$
- $ln(y_t) = \alpha_0 + \alpha_1 ln(x_t) + \alpha_2 ln(x_{t-1}) + \cdots + \alpha_{q+1} ln\left(x_{t-q}\right) + u_t$
  - Propensão de impacto $\alpha_1$ designada de elasticidade de curto prazo
  - Propensão de longo prazo $\alpha_1 + \alpha_2$+… $\alpha_q$ designada de elasticidade de longo prazo

# Dummies e interacções

Time dummies:

- Step dummies – captam o efeito de um evento que potencialmente muda permanentemente a trajectoria da série:

$$D_t = \begin{cases} 1 \text{ a partir do momento de ocorrencia do evento} \\ \ 0 \text{ antes do evento} \end{cases}$$

- Impulse dummies – captam o efeito de um evento que potencialmente muda apenas temporariamente a trajectoria da série:

$$D_t = \begin{cases} 1 \text{ no momento de ocorrencia do evento} \\ 0\ nos\ restantes\ periodos \end{cases}$$

- Exemplo com interações:

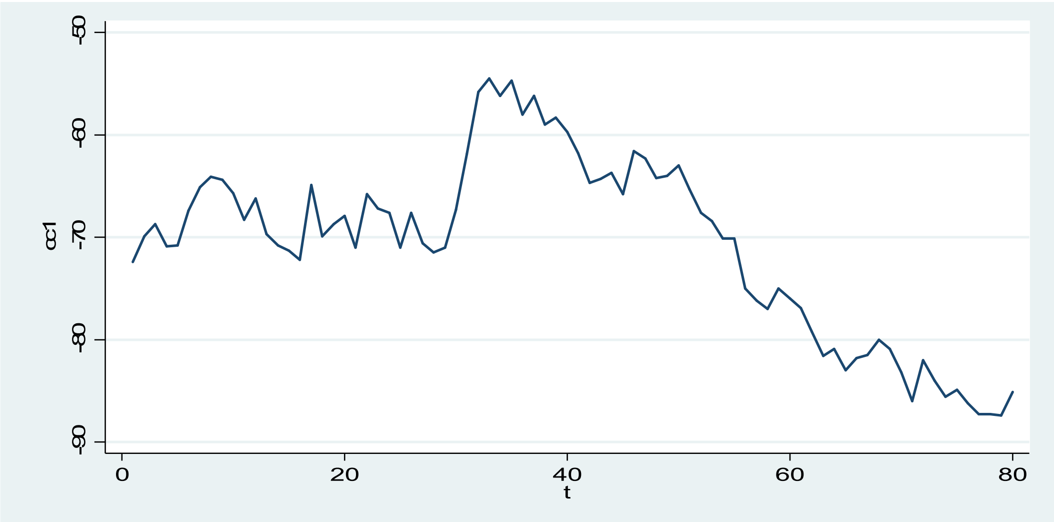
$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 D_t + \alpha_2 x_t + \alpha_3 (D_t x_t) + u_t$$

onde $D_t$ é uma step dummy

- Modelo antes do acontecimento: $y_t = \alpha_0 + \alpha_2 x_t + u_t$
- Modelo após o acontecimento: $y_t = (\alpha_0 + \alpha_1) + (\alpha_2 + \alpha_3)\ x_t + u_t$

# Dummies e interacções

**Exemplo:** pretende-se modelar o índice de confiança do consumidor para Portugal (cc1) como função da taxa de desemprego (unemp), usado dados trimestrais para o período 1990-2009. A representação gráfica da série sugere uma possível quebra de estrutura.




Definiu-se uma variável dummy, d97 que é 1 a partir de Janeiro de 1997 (momento é que parece haver alteração de comportamento)

# Dummies e interacções

Modelo: $cc1_t = \alpha_0 + \alpha_1 unemp_t + \alpha_2 d97_t + \alpha_3 (unemp_t * d97_t) + u_t$

```
. gen unempd97= unemp*d97
(2 missing values generated)

. reg cc1 unemp d97 unempd97
      Source |       SS           df       MS      Number of obs   =        80
-------------+----------------------------------   F(3, 76)        =     74.21
       Model |  4572.37487         3  1524.12496   Prob > F        =    0.0000
    Residual |  1560.90507        76  20.5382246   R-squared       =    0.7455
-------------+----------------------------------   Adj R-squared   =    0.7355
       Total |  6133.27994        79  77.6364549   Root MSE        =    4.5319
------------------------------------------------------------------------------
         cc1 |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
       unemp |   -.486134    .654488    -0.74   0.460     -1.78966    .8173918
         d97 |   28.11922   4.520358     6.22   0.000     19.11614    37.12229
    unempd97 |  -4.815761   .7484779    -6.43   0.000    -6.306484   -3.325038
       _cons |  -65.86282   3.820795   -17.24   0.000    -73.47259   -58.25304
------------------------------------------------------------------------------
```

- Antes da quebra: $\widehat{cc1}_t = -65.863 - 0.486 unemp_t$
- Após a quebra: $\widehat{cc1}_t = (-65.863 + 28.119) + (-0.486 - 4.816) unemp_t$

# Tendência deterministica

Variável tendência: representa a ordem de uma observação na amostra: $t = 1, 2, \dots, n$

Permite incorporar no modelo a tendência de crescimento / decréscimo de uma série que se deve a factores que não os incluídos no modelo: informa da variação de y que ocorre devida à simples passagem do tempo

A omissão da tendência causará a inconsistência dos coeficientes dos restantes regressores, caso a série de interesse Y

- tenha tendência
- não tenha tendência mas algum dos regressores tenha (o regressor está correlacionado com t, que está omitida do modelo)

# Tendência deterministica

A omissão de t pode gerar resultados onde

- se indica erradamente que o andamento da serie se deve a factores explicativos: **relação espúria** (parece haver significância estatística quando na verdade não há). Quando se inclui a tendência no modelo, torna-se evidente que a relação não existe.

.

- Se indica que Y e X não se relacionam (em casos onde Y o X têm tendência de sentido oposto). Aqui a inclusão da tendência pode tornar a sua relação mais significativa

# Tendência deterministica

Ilustração de Relação Espúria (Wooldridge, 2016. pp. 332-333)

The data in HSEINV are annual observations on housing investment and a housing price index in the United States for 1947 through 1988. Let *invpc* denote real per capita housing investment (in thousands of dollars) and let *price* denote a housing price index (equal to 1 in 1982). A simple regression in constant elasticity form, which can be thought of as a supply equation for housing stock, gives

$$\begin{aligned} \widehat{\log(invpc)} &= \underset{(.043)}{-.550} + \underset{(.382)}{1.241} \log(price) \\ n &= 42, R^2 = .208, \bar{R}^2 = .189. \end{aligned} \qquad [10.32]$$

To account for the trending behavior of the variables, we add a time trend:

$$\begin{aligned} \widehat{\log(invpc)} &= \underset{(1.36)}{-.913} - \underset{(.679)}{.381} \log(price) + \underset{(.0035)}{.0098}\, t \\ n &= 42, R^2 = .341, \bar{R}^2 = .307. \end{aligned} \qquad [10.33]$$

# Tendência deterministica

Ilustração de variável Y e X com tendência oposta (Wooldridge, 2016, pp. 334)

Annual data on the Puerto Rican employment rate, minimum wage, and other variables are used by Castillo-Freeman and Freeman (1992) to study the effects of the U.S. minimum wage on employment in Puerto Rico. A simplified version of their model is

$$\log(prepop_t) = \beta_0 + \beta_1 \log(mincov_t) + \beta_2 \log(usgnp_t) + u_t, \qquad [10.16]$$

where $prepop_t$ is the employment rate in Puerto Rico during year $t$ (ratio of those working to total population), $usgnp_t$ is real U.S. gross national product (in billions of dollars), and *mincov* measures the importance of the minimum wage relative to average wages. In particular, *mincov* =

$$\begin{aligned}\widehat{\log(prepop_t)} &= \underset{(0.77)}{-1.05} - \underset{(.065)}{.154} \log(mincov_t) - \underset{(.089)}{.012} \log(usgnp_t) \qquad [10.17] \\ n &= 38, R^2 = .661, \bar{R}^2 = .641.\end{aligned}$$

When we add a linear trend to equation (10.17), the estimates are

$$\begin{aligned}\widehat{\log(prepop_t)} &= \underset{(1.30)}{-8.70} - \underset{(.044)}{.169} \log(mincov_t) + \underset{(0.18)}{1.06} \log(usgnp_t) \\ &\quad - \underset{(.005)}{.032}\, t \qquad [10.38] \\ n &= 38, R^2 = .847, \bar{R}^2 = .834.\end{aligned}$$

# Tendência deterministica

Exemplos de modelos com tendência:

- Modelo de tendência linear:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 x_{t1} + \beta_3 x_{t2} \dots + u_t$$

$\Delta t = 1 \Rightarrow \Delta y_t = \beta_1$

- Modelo de tendência exponencial:

$$ln(y_t) = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 x_{t1} + \beta_3 x_{t2} \dots + u_t$$

$\Delta t = 1 \Rightarrow \%\Delta y_t = 100 * \beta_1\%$: obtendo-se a taxa de crescimento de y por unidade de tempo

- Modelo de tendência quadrática:

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \beta_2 t^2 + +\beta_3 x_{t1} + \beta_4 x_{t4} \dots + u_t$$

$\Delta t = 1 \Rightarrow \Delta y_t = \beta_1 + 2\beta_2 t$ (caso $\beta_1 > 0\ e\ \beta_2 < 0$: curva em U invertido)

# Tendência deterministica

Interpretação "detrending"/remoção de tendência do modelo

Considere-se o modelo de tendência linear

$$\hat{y}_t = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 t + \hat{\beta}_2 x_{t1} + \hat{\beta}_3 x_{t2} \dots$$

Caso se promova a remoção da tendência de cada uma das variáveis do modelo, obtendo-se de $\ddot{y}_t, \ddot{x}_{t1}, \ddot{x}_{t2}, \dots$, fazendo a regressão de $\ddot{y}_t$ em $\ddot{x}_{t1}, \ddot{x}_{t2}, \dots$ obtêm-se os mesmos coeficientes associados $x_{t1}, x_{t2}, \dots : \hat{\beta}_2, \hat{\beta}_3, \dots$

- Ao incluir a variável tendência numa regressão faz-se a remoção da tendência
- Os coeficientes de regressão informam sobre variações, após a remoção da tendência

# Tendência deterministica

Processo de detrending: aplica-se a cada variável. Por exemplo, para $y_t$

1. Estimar o modelo $y_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + e_t$
2. Obter o resíduo, que é a versão "detrended" da variável: $\ddot{y}_t = y_t - (\hat{\alpha}_0 + \hat{\alpha}_1 t)$

**Exemplo:** pretende-se modelar o índice de confiança do consumidor para Portugal (cc1) como função da taxa de desemprego (unemp) e de uma tendência linear:

$$cc1_t = \alpha_0 + \alpha_1 t + \alpha_2 unemp_t + e_t$$

Mostra-se de seguida que esta abordagem corresponde a uma remoção da tendência

# Tendência deterministica

```
. reg cc1 t unemp
      Source |       SS           df       MS      Number of obs   =        80
-------------+----------------------------------   F(2, 77)        =     67.99
       Model |  3915.95775         2  1957.97887   Prob > F        =    0.0000
    Residual |  2217.32219        77  28.7963921   R-squared       =    0.6385
-------------+----------------------------------   Adj R-squared   =    0.6291
       Total |  6133.27994        79  77.6364549   Root MSE        =    5.3662

------------------------------------------------------------------------------
         cc1 |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
           t |  -.0855887   .0329731    -2.60   0.011    -.1512465   -.0199309
       unemp |  -3.430343   .4660924    -7.36   0.000    -4.358452   -2.502235
       _cons |  -46.07005   2.382637   -19.34   0.000    -50.81449   -41.32562
------------------------------------------------------------------------------
```

# Tendência deterministica

```
. quietly reg cc1 t
. predict cc1dot, resid

. quietly reg unemp t
. predict unempdot, resid

. reg cc1dot unempdot
      Source |       SS             df       MS      Number of obs   =        80
-------------+----------------------------------   F(1, 78)        =     54.87
       Model |  1559.80074          1  1559.80074   Prob > F        =    0.0000
    Residual |  2217.32218         78  28.4272074   R-squared       =    0.4130
-------------+----------------------------------   Adj R-squared   =    0.4054
       Total |  3777.12292         79  47.8116825   Root MSE        =    5.3317
------------------------------------------------------------------------------
      cc1dot |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
    unempdot |  -3.430343    .463095    -7.41   0.000    -4.352294   -2.508392
       _cons |   1.23e-09   .5961041     0.00   1.000    -1.186752    1.186752
```

# Sazonalidade

A sazonalidade gera oscilações de subida/queda nas séries, que se repetem-se por trimestre, mês, dia ou horário. Decorrem de causas naturais (clima: estações do ano no consumo de água, turismo), medidas administrativas (inicio do ano escolar), ou tradições (vendas no período natalício)

Incorpora-se no modelo através de, por exemplo, 3, 11, e 6 dummies que identificam estações do ano, meses, e dias

Exemplo: estações do ano

$$y_t = \alpha_0 + \rho_1 primavera_t + \rho_2 ver\tilde{a}o_t + \rho_3 outono_t$$
$$+\alpha_1 x_{1t} + \alpha_2 x_{1t-1} + \alpha_3 x_{2t} + \alpha_4 x_{2t-1} + u_t$$

# Sazonalidade

Interpretação “seazonally adjusted”/remoção da sazonalidade

Considere-se o modelo do exemplo anterior. Caso se promova a desazonalização de cada uma das variáveis do modelo, obtendo-se de $\ddot{y}_t$, $\ddot{x}_{t1}, \ddot{x}_{t2}, \ldots$, fazendo a regressão de $\ddot{y}_t$ em $\ddot{x}_{t1}, \ddot{x}_{t2}, \ldots$ obtêm-se os mesmos coeficientes associados $x_{t1}, x_{t2}, \ldots$ : $\hat{\alpha}_1$, $\hat{\alpha}_2$, …

- Ao incluir as dummies de sazonalidade numa regressão promove-se a dessazonalização
- Os coeficientes de regressão informam sobre variações, após a remoção da sazonalidade

Processo de dessazonalização: aplica-se a cada variável, por exemplo, $y_t$

1. Estimar o modelo $y_t = \delta_0 + \delta_1 primavera_t + \delta_2 ver\tilde{a}o_t + \delta_3 outono_t + e_t$
2. Obter o resíduo, que é a versão desazonalizada da variável:

$$\ddot{y}_t = y_t - \left(\hat{\delta}_0 + \hat{\delta}_1 primavera_t + \hat{\delta}_2 ver\tilde{a}o_t + \hat{\delta}_3 outono_t\right)$$

# Sazonalidade

## Exemplo: índice de confiança do consumidor (retoma)

```
. reg cc1 unemp t Q1 Q2 Q3

      Source |       SS           df       MS      Number of obs   =        80
-------------+----------------------------------   F(5, 74)        =     26.34
       Model |  3926.97184         5  785.394368   Prob > F        =    0.0000
    Residual |   2206.3081        74  29.8149743   R-squared       =    0.6403
-------------+----------------------------------   Adj R-squared   =    0.6160
       Total |  6133.27994        79  77.6364549   Root MSE        =    5.4603

------------------------------------------------------------------------------
         cc1 |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
       unemp |  -3.438173   .4744801    -7.25   0.000    -4.383595   -2.492751
           t |  -.0860184   .0335616    -2.56   0.012    -.1528913   -.0191455
          Q1 |  -.9428817   1.728888    -0.55   0.587    -4.387766    2.502002
          Q2 |  -.7502904   1.728204    -0.43   0.665    -4.193812    2.693231
          Q3 |  -.2910729   1.726991    -0.17   0.867    -3.732178    3.150032
       _cons |  -45.50831   2.683547   -16.96   0.000    -50.85539   -40.16123
------------------------------------------------------------------------------
```

# Sazonalidade

```
. reg cc1 t unemp
      Source |       SS           df       MS      Number of obs   =        80
-------------+----------------------------------   F(2, 77)        =     67.99
       Model |  3915.95775         2  1957.97887   Prob > F        =    0.0000
    Residual |  2217.32219        77  28.7963921   R-squared       =    0.6385
-------------+----------------------------------   Adj R-squared   =    0.6291
       Total |  6133.27994        79  77.6364549   Root MSE        =    5.3662

------------------------------------------------------------------------------
         cc1 |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
           t |  -.0855887   .0329731    -2.60 · 0.011    -.1512465   -.0199309
       unemp |  -3.430343   .4660924    -7.36   0.000    -4.358452   -2.502235
       _cons |  -46.07005   2.382637   -19.34   0.000    -50.81449   -41.32562
------------------------------------------------------------------------------

. display ((0.6403-0.6385)/3)/((1-0.6403)/(80-6))
.1234362
. display Ftail(3,74,.1234362)
.94599099
```

Não se rejeita Ho de ausência de sazonalidade na série

# Séries temporais estacionárias e fracamente dependentes

**Processo estocástico estacionário**: processo cuja distribuição é sempre a mesma qualquer que seja o período analisado: a distribuição conjunta de $y_{t_1}, y_{t_2}, \ldots y_{t_m}, \ (1 \leq t_1 \leq t_2 \ldots)$ iguala a distribuição conjunta de $y_{t_1+h}, y_{t_2+h}, \ldots y_{t_m+h}$, para um número inteiro $h \geq 1$ que define um intervalo de tempo

- retirando um conjunto de observações num intervalo de tempo e retirando outro h periodos mais tarde, a distribuição é igual
- Não significa ausencia de correlacão entre observações adjacentes, significa que a correlação existente á estável ao longo do tempo

**Processo estocástico estacionário em covariância**: definição menos exigente do que a anterior, requerendo apenas que a média e variância do processo (requer-se que o segundo momento seja finito: $E({y_t}^2) < \infty$) sejam constantes e a covariância e correlação entre $y_t$ e $y_{t+h}$ dependam apenas do intervalo de tempo h:

- $E(y_t) = \mu$
- $V(y_t) = E(y_t - \mu)^2 = \sigma^2$
- $Cov(y_t, y_{t+h})$ pode depender de h mas não de t

# Séries temporais estacionárias e fracamente dependentes

**Processo fracamente dependente**: requer que $y_t$ e $y_{t+h}$ sejam "quase" independents quando $h \rightarrow \infty$

- definição aplica-se a séries estacionárias ou não
- Quando se verifica estacionaridade em covariância, a sequência é designada
  - fracamente dependente se $Cor(y_t, y_{t+h})$ vai para zero com a rapidez suficiente quando $h \rightarrow \infty$
  - assimptoticamente não correlacionada se $Cor(y_t, y_{t+h}) \rightarrow 0$ quando $h \rightarrow \infty$

- A estacionaridade com dependencia fraca substitui o requisito de amostra aleatória requerido na aplicação da Lei dos Grandes Números e do Teorema do Limite Central

# Ruido branco

"White noise" é um processo cujas observações não são correlacionadas:

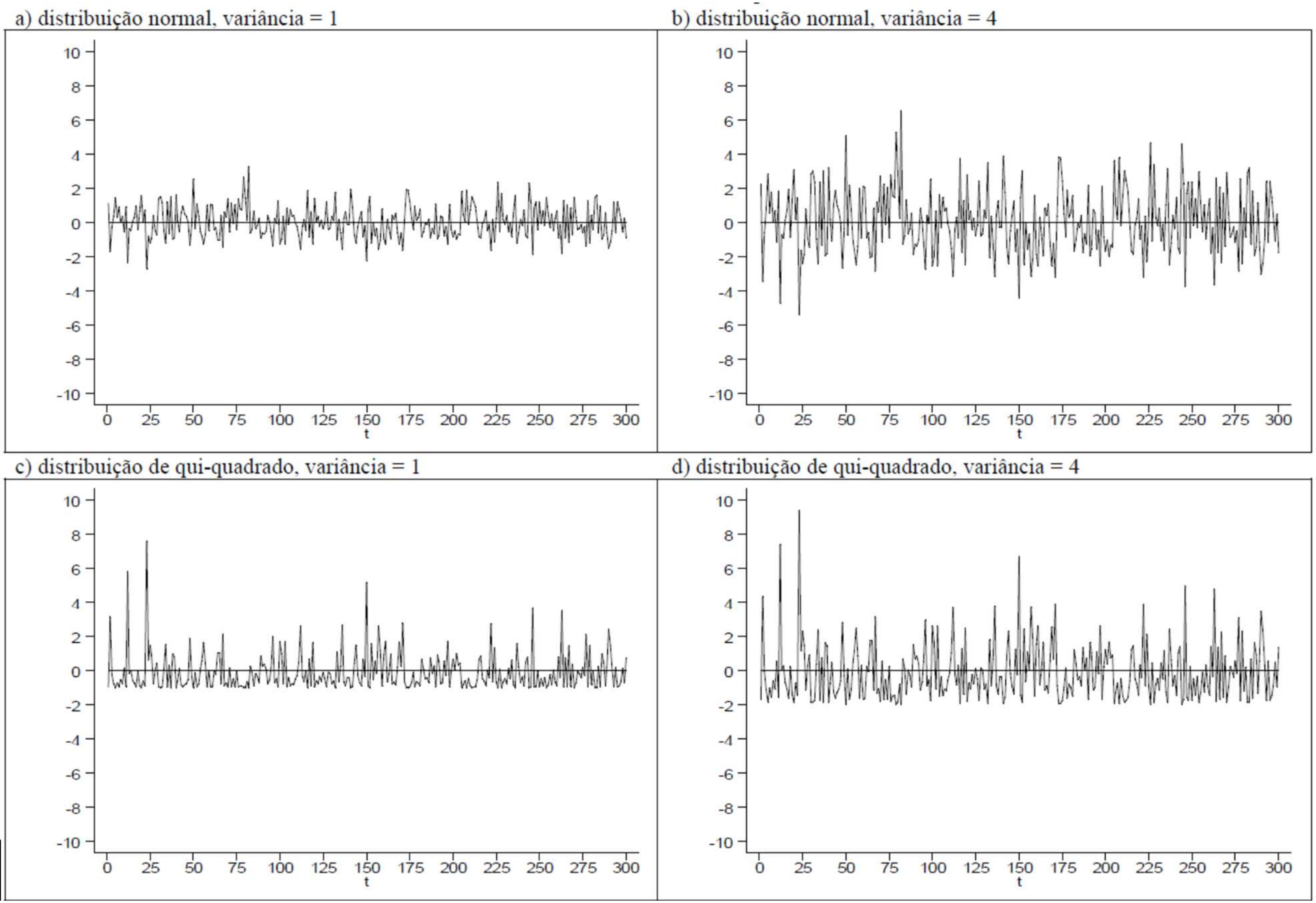
$$y_t = \varepsilon_t$$

onde

- $E(\varepsilon_t) = \mu_\varepsilon$
- $V(\varepsilon_t) = \sigma_\varepsilon^2$
- $Cov(\varepsilon_t, \varepsilon_{t-h}) = 0$ para $h \neq 0$

# Ruido branco

Simulações para diferentes "white noises"



# Modelos autorregressivos

**Modelo AR(1):**

$$y_t = \rho y_{t-1} + \varepsilon_t$$

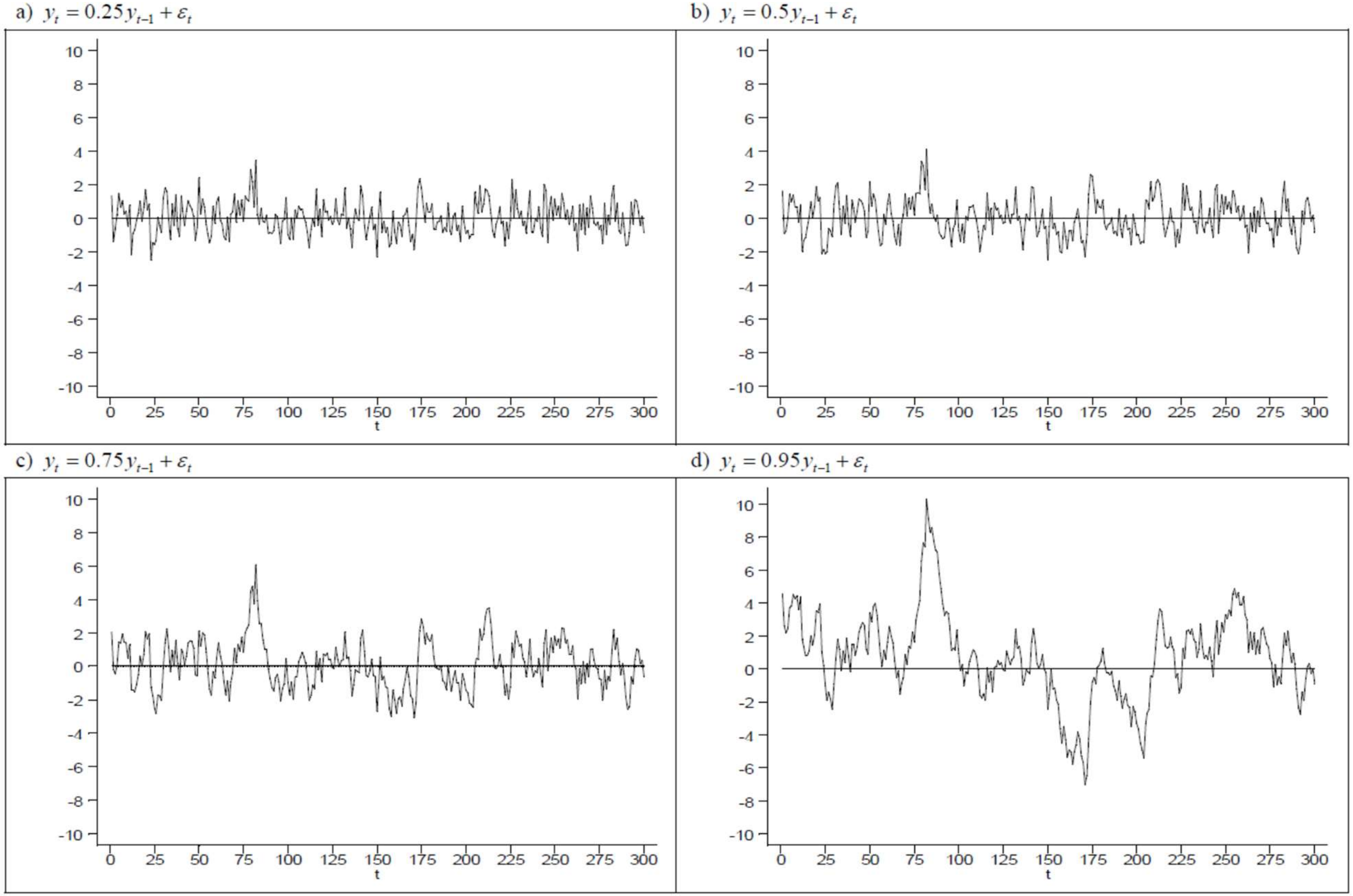
onde o comportamento de $y_t$ resulta do seu passado e de um termo erro $\varepsilon_t$, ruido branco ($\varepsilon_t \sim \mathrm{iid}(0, \sigma^2)$), que inclui todos os outros determinantes de $y_t$ para além de $y_{t-1}$. Assume-se $|\rho\,| < 1$, o que permite dizer que este AR(1) é um processo estável.

Verifica-se

- $\mathrm{E}(y_t) = \mathrm{E}(\varepsilon_t) + \rho\mathrm{E}(\varepsilon_{t-1}) + \rho^2\mathrm{E}(\varepsilon_{t-2}) + \cdots = 0$
- $\mathrm{V}(y_t) = \mathrm{E}({y_t}^2) = \mathrm{E}({\varepsilon_t}^2) + \rho\mathrm{E}({\varepsilon_{t-1}}^2) + \rho^2\mathrm{E}({\varepsilon_{t-2}}^2) + \cdots = \frac{\sigma^2}{1-\rho^2}$
- $\mathrm{Cov}(y_t, y_{t-h}) = \gamma_h = \rho^h\,\sigma^2$
- $\mathrm{Cor}(y_t, y_{t-h}) = \frac{\gamma_h}{\gamma_0} = \rho^h$
- Estacionário e fracamente dependente se $|\rho| < 1$

# Modelos autorregressivos

Exemplos de processos AR(1)



# Modelos de médias móveis

**Modelo MA(1)**

$$y_t = \varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}, |\theta| < 1$$

onde $\varepsilon_t$ é um ruido branco,$\varepsilon_t \sim \mathrm{iid}(0, \sigma^2)$

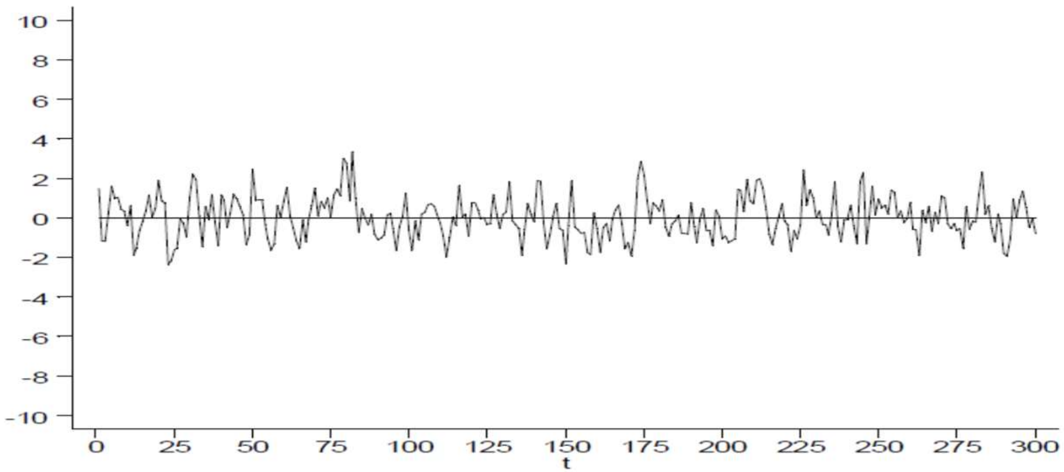
Verifica-se

- $\mathrm{E}(y_t) = \mathrm{E}(\varepsilon_t) + \theta\mathrm{E}(\varepsilon_{t-1}) = 0$
- $\mathrm{V}(y_t) = \mathrm{V}(\varepsilon_t + \theta\varepsilon_{t-1}) = \mathrm{V}(\varepsilon_t) + \theta^2\mathrm{V}(\varepsilon_{t-1}) + 2\theta Cov(\varepsilon_t\varepsilon_{t-1}) = \sigma^2(1 + \theta^2)$
- $\mathrm{Cov}(y_t, y_{t-h}) = \begin{cases} \theta\sigma^2 se\ h = 1 \\ 0\ se\ h > 1 \end{cases}$
- $\mathrm{Cor}(y_t, y_{t-h}) = \begin{cases} \frac{\theta\sigma^2}{\sigma^2(1+\theta^2)} = \frac{\theta}{(1+\theta^2)} se\ h = 1 \\ 0\ se\ h > 1 \end{cases}$
- Estacionário e fracamente dependente

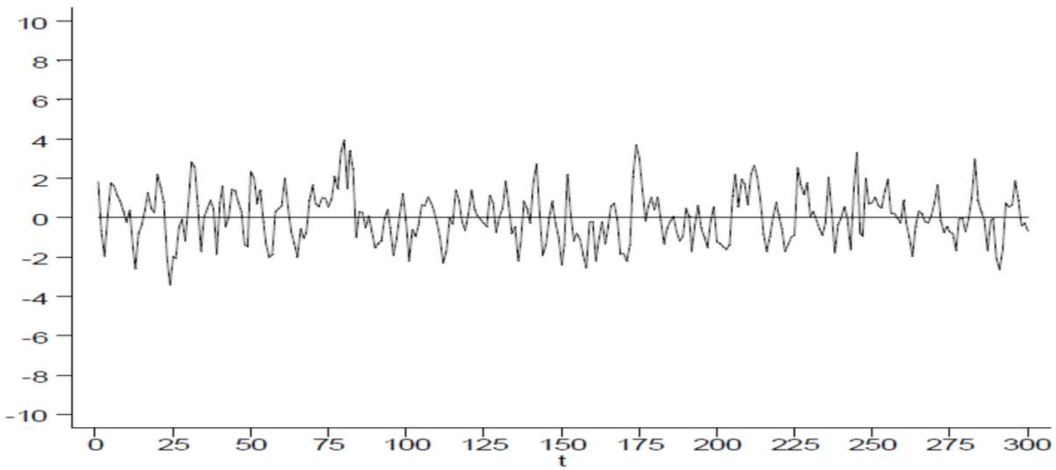
# Modelos de médias móveis

Exemplos de modelo MA(1)

a) $y_t = \varepsilon_t + 0.5\varepsilon_{t-1}$




b) $y_t = \varepsilon_t + 0.95\varepsilon_{t-1}$



# Processos estacionários em tendência

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + u_t$$

Verifica-se

- $\mathrm{E}(y_t) = \beta_0 + \beta_1 t$

sendo um processo não estacionário, já que apenas é estacionário em tendência, pode ser estimado por OLS, desde que seja fracamente dependente em torno à tendência

# Exemplo

Seja $e_t, t = -1,0,1, \ldots$ uma sucessão de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas com média zero e variância unitária, $e_t \sim i.i.d.(0,1)$. Defina o processo estocástico

$$x_t = e_t - 0.5e_{t-1} + 0.5e_{t-2}, t = 1,2, \ldots$$

a) Determine $\mathrm{E}(x_t)$ e $\mathrm{V}(x_t)$ e verifique se dependem de t.

b) Mostre que $\mathrm{Cor}(x_t, x_{t+1}) = -0.5$ e $\mathrm{Cor}(x_t, x_{t+2}) = 1/3$

c) Qual é a $\mathrm{Cor}(x_t, x_{t+h})$ para $h > 2$

Tem-se

- $E(e_t) = 0$
- $V(e_t) = 1$
- $Cov(e_t, e_s) = 0$ para $t \neq s$ devido à independência

# Exemplo

a)

- $E(x_t) = E(e_t) - 0.5E(e_{t-1}) + 0.5E(e_{t-2}) = 0$
- $V(x_t) = V(e_t) - 0.5^2V(e_{t-1}) + 0.5^2V(e_{t-2}) = 1 + 0.25 + 0.25 = 1.5$

Não dependem de t

b)

- $\mathrm{Cor}(x_t, x_{t+1}) = \frac{\mathrm{Cov}(x_t,x_{t+1})}{\sqrt{V(x_t)}\sqrt{V(x_{t+1})}} = \frac{\mathrm{Cov}(x_t,x_{t+1})}{\sqrt{1.5}\sqrt{1.5}} = \frac{-0.75}{1.5} = -0.25$

$$\mathrm{Cov}(x_t, x_{t+1}) = \mathrm{E}(x_t x_{t+1})$$
$$= \mathrm{E}\big((e_t - 0.5e_{t-1} + 0.5e_{t-2})(e_{t+1} - 0.5e_t + 0.5e_{t-1})\big) =$$
$$= -0.5\mathrm{E}(e_t^2) - 0.25\mathrm{E}(e_{t-1}^2) = -0.5 - 0.25 = -0.75$$

- $\mathrm{Cor}(x_t, x_{t+2}) = \frac{\mathrm{Cov}(x_t,x_{t+2})}{\sqrt{V(x_t)}\sqrt{V(x_{t+2})}} = \frac{\mathrm{Cov}(x_t,x_{t+2})}{\sqrt{1.5}\sqrt{1.5}} = \frac{0.5}{1.5} = 1/3$

$$\mathrm{Cov}(x_t, x_{t+2}) = \mathrm{E}\big((e_t - 0.5e_{t-1} + 0.5e_{t-2})(e_{t+2} - 0.5e_{t+1} + 0.5e_t)\big)$$
$$= 0.5\mathrm{E}(e_t^2) = 0.5$$

# Exemplo

c)

$$\mathrm{Cor}(x_t, x_{t+h}) = \frac{\mathrm{Cov}(x_t, x_{t+h})}{\sqrt{V(x_t)}\sqrt{V(x_{t+h})}} = \frac{\mathrm{Cov}(x_t, x_{t+h})}{\sqrt{1.5}\sqrt{1.5}} = \frac{0}{1.5} = 0$$

$$\mathrm{Cov}(x_t, x_{t+3}) = \mathrm{E}\big((e_t - 0.5e_{t-1} + 0.5e_{t-2})(e_{t+3} - 0.5e_{t+2} + 0.5e_{t+1})\big)$$
$$= 0$$

Para h=4, 5, … também se terá 0

- $\mathrm{Cor}(x_t, x_{t+h}) = 0$ para $h > 2$

# Propriedades assimptóticas do estimador OLS

1´. Linearidade nos parâmetros, juntamente com estacionaridade e dependência fraca

2´. Ausência de colineariedade perfeita

3´. $E(u_t|\boldsymbol{x}_t) = 0$ exogeneidade contemporânea

4´. Homoscedasticidade: $Var(u_t|\boldsymbol{x}_t) = Var(u_t) = \sigma^2$

5´. Ausência de autocorrelação: $E(u_t, u_s|x_t, x_s) = 0, \forall t \neq s$

- No AR(1) $y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + u_t$ tem-se $E(u_t, u_s|y_{t-1}, y_{s-1})$
  - como $t \neq s,\ E(u_t, u_s|y_{t-1}, y_{s-1}) = u_s E(u_t|y_{t-1}, y_{s-1})$
  - Como em presença de exogeneidade contemporânea $E(u_t|y_{t-1}) = E(u_t|y_{t-1}, y_{t-2}, y_{t-3} \dots) = 0$, então não há autocorrelação: $E(u_t, u_s|y_{t-1}, y_{s-1}) = 0$

| Propriedades |
|---|
| 1´-3´: estimadores consistentes |
| 1´-5´: estimadores normalmente distribuídos, sendo que os testes t, F e LM são assimptoticamente válidos. |
| |

# Propriedades assimptóticas do estimador OLS

**Análise de 3': exogeneidade contemporânea**

Exemplo 1: modelo estático

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + u_t$$

Requer que $E(u_t|x_t) = 0$,

o que não se verificará com variáveis omitidas em $u_t$ correlacionadas com $x_t$, mas permite, por exemplo, que $x_t$ seja uma função de $y_{t-1}$ ($y_{t-1} = f(u_{t-1})$), pois não se requer $E(u_{t-1}|x_t) = 0$. Por exemplo, permite feedback de y para (valores futuros de) x: se x for uma variável de politica, pode depender de y no momento anterior, causando a correlação entre $u_{t-1}$ e $x_{t1}$

Exemplo 2: modelo FDL

$$y_t = \alpha_0 + \delta_0 z_t + \delta_1 z_{t-1} + \delta_2 z_{t-2} + u_t$$

Com $E(u_t|z_t, z_{t-1}, z_{t-2}, z_{t-3} + \cdots) = 0$,

o que significa que $\mathrm{E}(y_t|z_t, z_{t-1}, z_{t-2}) = \mathrm{E}(y_t|z_t, z_{t-1}, z_{t-2}, z_{t-3} + \cdots)$: depois de controlado para $z_t, z_{t-1}, z_{t-2}$, a informação de $z_{t-3} + \cdots$ é irrelevante. Definindo $\boldsymbol{x}_t$=$(z_t, z_{t-1}, z_{t-2})$, satisfaz-se 3´.

# Propriedades assimptóticas do estimador OLS

Exemplo 3: modelo AR(1)

$$y_t = \rho y_{t-1} + u_t$$

com

$$E(u_t | y_{t-1}, y_{t-2}, y_{t-3} + \cdots) = 0,$$

o que significa que $\mathrm{E}(y_t|y_{t-1}) = \mathrm{E}(y_t|y_{t-1}, y_{t-2}, y_{t-3} + \cdots)$: depois de controlado para $y_{t-1}$, a informação de $y_{t-2}, y_{t-3} + \cdots$ é irrelevante

Definindo $\boldsymbol{x}_t$=$(y_{t-1})$, satisfaz-se 3´. O que não se satisfaz é a versão correspondente 3, que garantiria também que $\rho$ fosse centrado. Na verdade $Cov(u_t, y_t) = \mathrm{Cov}\big(u_t(\rho y_{t-1} + u_t)\big) = \mathrm{Var}(u_t) = \sigma^2$

# Séries temporais altamente persistentes

Caso o processo não seja fracamente dependente, então a aplicação do OLS requer que os pressupostos mais fortes expostos anteriormente se verifiquem (entre os quais a exogeneidade estrita)

Neste tópico estudam-se processos altamente persistentes / fortemente dependentes. O objectivo é conhecer estes processos e motivar a aplicação de transformações que permitem o uso do OLS

Processos estudados:

- Passeio aleatório
- Passeio aleatório com deslocação/drift

Ambos são processos de raiz unitária

# Séries temporais altamente persistentes

## 1) Passeio Aleatório

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t$$

Processo AR(1) com $\rho = 1$ (de raiz unitária). Substituindo:

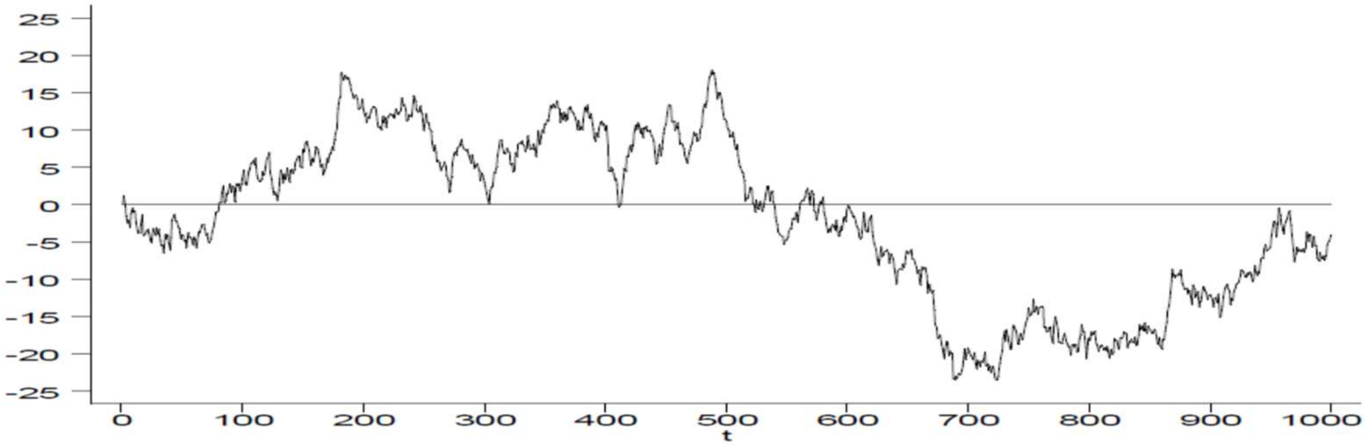
$$y_t = y_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t = y_{t-3} + \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$
$$y_t = y_0 + \varepsilon_1 + \cdots \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

Obtendo-se

- $E(y_t) = y_0$, sendo comum assumir $E(y_t) = y_0 = 0$
- $V(y_t) = \sigma_\varepsilon^2 t$ (série não estacionária: variância depende de t)
- $\mathrm{Cor}(y_t, y_{t+h}) = \sqrt{\frac{t}{t+h}}$
    - ao contrário do que acontece com $|\rho| < 1$, a corr depende de t
    - para t fixo, quando $\mathrm{h} \to \infty$ , $\mathrm{Cor}(y_t, y_{t+h}) \to 0$ , mas lentamente, especialmente se t for grande: a série não é assimptoticamente não correlacionada
    - Para t grande $\mathrm{Cor}(y_t, y_{t+h}) \to 1$

# Séries temporais altamente persistentes

Exemplo de um passeio aleatório



# Séries temporais altamente persistentes

Em Economia/Finanças, em variáveis deste tipo, o efeito de intervenções prolonga-se, ao contrario do que acontece com variáveis assimptoticamente não correlacionadas. O valor de y no momento t correlaciona-se com o valor de y num futuro distante.

De facto

$$y_{t+h} = y_{t+h-1} + \varepsilon_{t+h} = y_t + \varepsilon_{t+1} + \cdots + \varepsilon_{t+h-1} + \varepsilon_{t+h}$$

Obtendo-se

- $E(y_{t+h}|y_t) = y_t$ (significa que no futuro a melhor previsão é sempre o ultimo valor da série observado, mesmo num futuro distante)
- $\mathrm{V}(y_{t+h}|y_t) = \sigma_\varepsilon^2(t+h)$
- $\mathrm{Cor}(y_t, y_{t+h}) = \sqrt{\frac{t}{t+h}}$

* No caso de um AR(1) estável, $E(y_{t+h}|y_t) = \rho^h y_t$, indo para zero quando h $\rightarrow \infty$ , por isso a dependência do ultimo valor da série esvai-se

# Séries temporais altamente persistentes

## 2) Passeio aleatório com drift

$$y_t = \alpha + y_{t-1} + \varepsilon_t$$

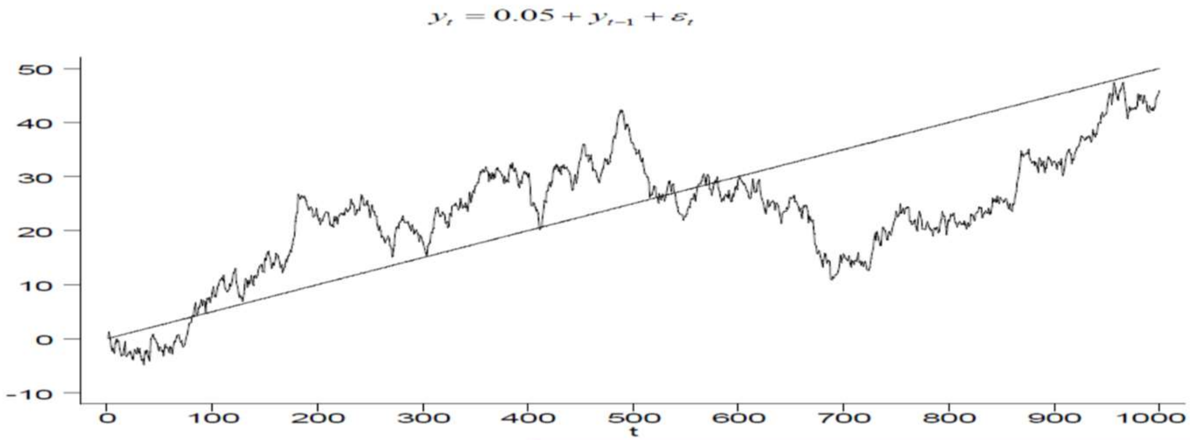
Substituindo sucessivamente:

$$y_t = \alpha + \alpha + y_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t = \alpha + \alpha + \alpha + y_{t-3} + \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

$$y_t = \alpha t + y_0 + \varepsilon_1 + \cdots \varepsilon_{t-2} + \varepsilon_{t-1} + \varepsilon_t$$

Obtendo-se

- $E(y_t) = \alpha t + y_0$
- $V(y_t) = \sigma_\varepsilon^2 t$ (série não estacionária: tanto a média como a variância dependem de t)



# Séries temporais altamente persistentes

Para este caso

$$y_{t+h} = \alpha + y_{t+h-1} + \varepsilon_{t+h} = \alpha h + y_t + \varepsilon_{t+1} + \cdots + \varepsilon_{t+h-1} + \varepsilon_{t+h}$$

Obtendo-se

- $E(y_{t+h}) = \alpha h + y_t$ (significa que no futuro a melhor previsão é sempre o ultimo valor da série observado, mais o drift multiplicado por h)
- $\mathrm{V}(y_{t+h}) = \sigma_\varepsilon^2(t + h)$
- $\mathrm{Cor}(y_t, y_{t+h}) = \sqrt{\frac{t}{t+h}}$

# Transformações de séries fortemente dependentes

Ideia: transformar uma série altamente persistente numa fracamente dependente

Ordem de integração

- I(0): série fracamente dependente – OLS pode ser directamente usado
- I(1): processo de raiz unitária cuja primeira diferença

$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1}$$

é I(0). Um processo I(1) é designado de processo estacionário às diferenças

Exemplo 1: passeio aleatório

$$y_t = y_{t-1} + \varepsilon_t \rightarrow I(1)$$
$$\Delta y_t = y_t - y_{t-1} = \varepsilon_t \rightarrow I(0)$$

# Transformações de séries fortemente dependentes

Exemplo 2: modelo de tendência determinística

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \cdots + u_t \rightarrow estac. em\ tendência$$

$$\Delta y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \cdots + u_t - (\beta_0 + \beta_1(t-1) + \cdots + u_{t-1})$$

$$= \beta_1 + \Delta u_t \rightarrow estac. em\ tendência$$

Assim, pode-se incluir a trend ou fazer a diferença

Exemplo 3: diferenças de logs

$$ln(y_t) = \cdots \rightarrow I(1)$$

$$\Delta ln(y_t) = ln(y_t) - ln(y_{t-1}) \rightarrow I(0)$$

Note-se que $\Delta ln(y_t) \approx \frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1}}$

é a alteração proporcional, sendo

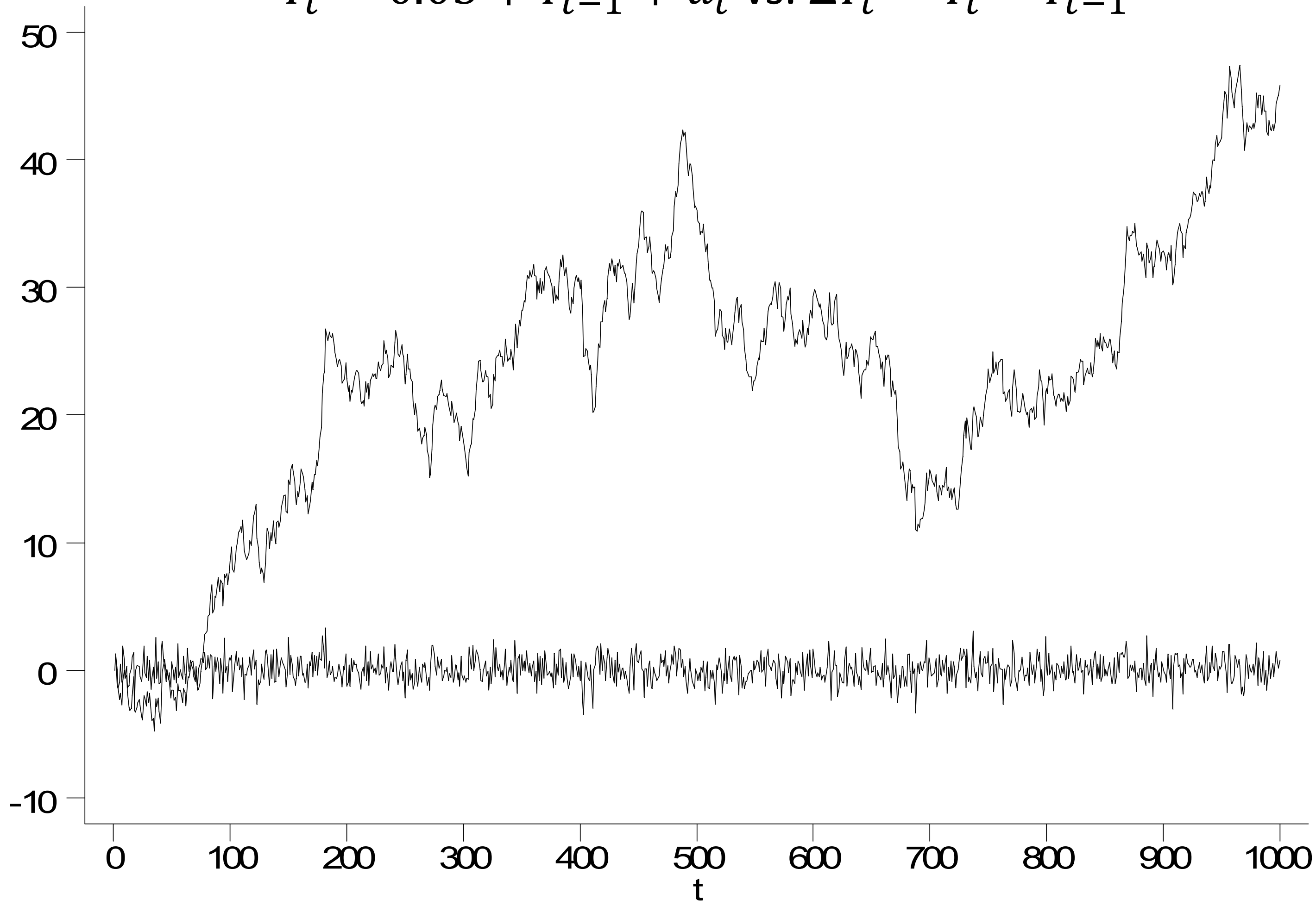
$$\Delta ln(y_t)100 \approx \frac{y_t - y_{t-1}}{y_{t-1}} 100\ \%$$

a alteração percentual

# Transformações de séries fortemente dependentes

Exemplo e ilustração 4: passeio aleatório com drift

$$Y_t = 0.05 + Y_{t-1} + u_t \text{ vs. } \Delta Y_t = Y_t - Y_{t-1}$$



# Transformações de séries fortemente dependentes

Como saber se a série é I(1), caso onde é necessário usar a primeira diferença com o OLS, ou I(0), caso onde a série se usa em níveis?

Procedimento informal

Supondo $y_t$ AR(1), $y_t = \rho y_{t-1} + u_t$. O ordem de integração de $y_t$ depende da autocorrelação de primeira ordem: será I(0) para $|\rho| < 1$ e I(1) para $|\rho| = 1$.

Assim, se $\text{cor}(y_t, y_{t-1}) > 0.9$, $y_t$ considera-se I(1) e trabalha-se com a série às diferenças. Para $\text{cor}(y_t, y_{t-1}) > 0.8$, por vezes já é recomendável diferenciar; Wooldridge (2016), p. 359

Testes de raízes unitárias (não são lecionados no âmbito da uc de Econometria): teste de Dickey-Fuller e Dickey-Fuller aumentado (ADF)

# Modelos dinamicamente completos

Um modelo dinamicamente completo satisfaz o pressuposto 5 de ausência de autocorrelação, isto é, satisfaz o pressuposto 5'

$$E(u_t, u_s | x_t, x_s) = 0, \forall t \neq s$$

Caso 1 – Modelo AR(1): foi antes dito que verifica 5'

Caso 2 - Modelo estático: $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + u_t$

- Tem-se que $E(y_t | x_t) = \beta_0 + \beta_1 x_t$ e o requisito para a consistência do OLS: $E(u_t | x_t) = 0$ (exog. contemporanea), podendo ocorrer $E(u_t, u_s | x_t, x_s) = 0 \neq 0$ (exemplo: $u_t = y_{t-1}, \ldots$, dado que $y_{t-1} = \mathrm{f}(u_{t-1}, \ldots)$)
- Só assumindo adicionalmente que $E(y_t | x_t, y_{t-1}, x_{t-1}, \ldots) = E(y_t | x_t)$, o que equivale a assumir $E(u_t | x_t, y_{t-1}, x_{t-1}, \ldots) = E(u_t | x_t) = 0$, se tem $Corr(u_t, u_s | X) = 0$ (um modelo estático dinamicamente completo)
  - Intuição de $E(y_t | x_t, y_{t-1}, x_{t-1}, \ldots) = E(y_t | x_t)$: tendo-se controlado para $x_t$, $(y_{t-1}, x_{t-1}, \ldots)$ não influencia $y_t$

# Modelos dinamicamente completos

Caso 3 - Modelo $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + \beta_2 y_{t-1} + \beta_3 x_{t-1} + u_t$

- $E(y_t|x_t, y_{t-1}, x_{t-1}) = \beta_0 + \beta_1 x_t + \beta_2 y_{t-1} + \beta_3 x_{t-1}$ e o requisito para a consistência do OLS é: $E(u_t|x_t, y_{t-1}, x_{t-1}) = 0$, podendo ocorrer $E(u_t, u_s|x_t, x_s) \neq 0$ (exemplo, $u_t = y_{t-2}$, ..., dado que $y_{t-2} = \mathrm{f}(u_{t-2}, \ldots)$)
- Só assumindo adicionalmente que $E(y_t|x_t, y_{t-1}, x_{t-1}, \ldots) = E(y_t|x_t, y_{t-1}, x_{t-1})$ , equivalendo a $E(u_t|x_t, y_{t-1}, x_{t-1}, \ldots) = E(u_t|x_t, y_{t-1}, x_{t-1}) = 0$ , se tem $E(u_t, u_s|x_t, x_s) \neq 0$ (um modelo dinamicamente completo)
    - Intuição: tendo-se controlado para $(x_t, y_{t-1}, x_{t-1})$, $(y_{t-2}, x_{t-2}, \ldots)$ não influencia $y_t$

**Em geral, um modelo contendo as variáveis e os lags relevantes para explicar $y_t$ é dinamicamente completo (não tem autocorrelação)**

# Autocorrelação: definição e consequências

Decorre da falha do pressuposto 5’:

$$E(u_t, u_s | x_t, x_s) \neq 0, \forall t \neq s,$$

O que ocorrerá se o modelo não for dinamicamente completo

Autocorrelação AR(1):

$$u_t = \rho u_{t-1} + \varepsilon_t,$$
$$|\rho| < 1,\ \varepsilon_t \sim \text{ruido branco}$$

Autocorrelação AR(p):

$$u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} \ldots \rho_p u_{t-p} + \varepsilon_t$$
$$\varepsilon_t \sim \text{ruido branco}$$

Consequências sobre o estimador e inferência OLS:

- estimador centrado (ex. estrita) ou consistente (dependência fraca)
- estimador não BLUE com variância e inferência standard inválida

# Autocorrelação: testes

**Autocorrelação AR(1)**

$H_0: \rho = 0$ (ausência de autocorrelação) e $H_1: \rho \neq 0$ ou $H_1: \rho > 0$

Testes

- $t_\rho$ (sob exogeneidade estrita)
- Durbin-Watson (sob exogeneidade estrita e normalidade do erro)
- H-alt de Durbin (sem exogeneidade estrita)

**Autocorrelação AR(p)**

$H_0: \rho_1 = \rho_2 \ldots = \rho_p = 0$ (ausência de autocorrelação)

Testes (sem exogeneidade estrita)

- H-alt de Durbin
- Breusch-Godfrey

- Válidos com homoscedasticidade. Todos podem ser feitos robustos, except o DW

# Autocorrelação: testes

**AR(1) : testes $t_\rho$ e H-alt de Durbin**

1. Estimar o modelo de interesse: $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \cdots \beta_k x_{tk} + u_t$

2. Obter os resíduos $\hat{u}_t$

3. Estimar o modelo auxiliar:

   – $t_\rho$: $\hat{u}_t = \rho \hat{u}_{t-1} + \varepsilon_t$

   – H-alt de Durbin: :$\hat{u}_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \cdots \beta_k x_{tk} + \rho \hat{u}_{t-1} + e_t$

4. Aplicar o teste: $t_\rho = \frac{\hat{\rho}}{\hat{\sigma}_{\hat{\rho}}}$

# Autocorrelação: testes

**AR(1) : testes de Durbin-Watson**

1. Estimar o modelo de interesse: $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \cdots \beta_k x_{tk} + u_t$

2. Obter os resíduos $\hat{u}_t$

3. Obter a estatística de teste DW$= \frac{\sum_{t=2}^{n} (\hat{u}_t - \hat{u}_{t-1})^2}{\sum_{t=1}^{n} \hat{u}_t{}^2} \approx 2(1-\hat{\rho})$

4. A distribuição DW tem uma zona inconclusiva, possuindo dois valores críticos, dL e dU:

– DW < dL: rejeita-se H0

– dL < DW < dU : inconclusão

– DW > dU : não se rejeita H0.

# Autocorrelação: testes

AR(p) : testes $t_\rho$ e H-alt de Durbin

Teste BG

1. Estimar o modelo de interesse: $y_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \cdots \beta_k x_{tk} + u_t$

2. Obter os resíduos $\hat{u}_t$

3. Estimar o modelo auxiliar:

$$\hat{u}_t = \beta_0 + \beta_1 x_{t1} + \cdots \beta_k x_{tk} + \rho_1 \hat{u}_{t-1} + \rho_2 \hat{u}_{t-2} + \cdots + \rho_p \hat{u}_{t-p} + e_t$$

4. Aplicar o teste:

   – Versão BG: $LM = (N-p) R^2_{\hat{u}} \sim X^2_p$

   – Versão F (p restrições). Neste caso, colocando $y_t$ em lugar de $\hat{u}_t$ dá o mesmo resultado

# Autocorrelação: testes

## Exemplo: confiança do consumidor em Portugal

```
. tsset t
        time variable:  t, 1 to 80
                delta:  1 unit

. reg cc1 unemp
      Source |       SS       df       MS              Number of obs =      80
-------------+------------------------------           F(1, 78)      =  120.39
       Model |  3721.93515     1  3721.93515           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  2411.34478    78  30.9146767           R-squared     =  0.6068
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.6018
       Total |  6133.27994    79  77.6364549           Root MSE      =  5.5601

------------------------------------------------------------------------------
         cc1 |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
       unemp |   -4.17529   .3805262   -10.97   0.000    -4.932859    -3.41772
       _cons |  -44.94287   2.427369   -18.52   0.000    -49.77539   -40.11035
------------------------------------------------------------------------------

. predict uhat, resid
(2 missing values generated)
```

# Autocorrelação: testes

```
. reg uhat L.uhat
…
------------------------------------------------------------------------------
        uhat |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
        uhat |
         L1. |   .8831601   .0516228    17.11   0.000      .780366    .9859543
             |
       _cons |   .1151422   .2847252     0.40   0.687    -.4518181    .6821026
------------------------------------------------------------------------------
. reg uhat unemp L.uhat
…
------------------------------------------------------------------------------
        uhat |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
       unemp |   .2097498   .1738344     1.21   0.231    -.1364714    .5559709
             |
        uhat |
         L1. |   .8882955   .0516463    17.20   0.000     .7854329    .9911581
             |
       _cons |  -1.181139   1.111194    -1.06   0.291    -3.394274    1.031997
------------------------------------------------------------------------------
```

Em ambos os testes se rejeita a hipótese nula de ausência de autocorrelação

# Diferenciação e autocorrelação

Considere-se um modelo linear simples

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 x_t + u_t$$

onde $u_t$ segue um passeio aleatório: $u_t = u_{t-1} + \varepsilon_t$

A versão com as variáveis às diferenças

$$\Delta y_t = \beta_0 + \beta_1 \Delta x_t + \Delta u_t$$

terá $\Delta u_t$ com média 0, variância constante e autocorrelação de 0

Para outros tipos de autocorrelação, aplicar diferenças atenua ou elimina o problema

# Soluções para a autocorrelação

1. Método dos mínimos quadrados generalizados admissíveis (FGLS)

   Assume exogeneidade estrita e $u_t$ AR(1)

- Modelo:

$$Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t, \epsilon_t \sim IID\left(0, \sigma_\epsilon^2\right), |\rho| < 1$$

- Escrever o modelo em função de $\epsilon_t$:

$$Y_{t-1} = \beta_0 + \beta_1 X_{t-1} + u_{t-1} \Leftrightarrow u_{t-1} = Y_{t-1} - \beta_0 - \beta_1 X_{t-1}$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t = \rho Y_{t-1} - \rho\beta_0 - \beta_1 \rho X_{t-1} + \epsilon_t$$

$$\begin{aligned} Y_t &= \beta_0 + \beta_1 X_t + u_t \\ Y_t &= \beta_0 + \beta_1 X_t + \rho Y_{t-1} - \rho\beta_0 - \beta_1 \rho X_{t-1} + \epsilon_t \\ \underbrace{Y_t - \rho Y_{t-1}}_{Y_t^*} &= \beta_0 (1 - \rho) + \beta_1 \underbrace{(X_t - \rho X_{t-1})}_{X_t^*} + \epsilon_t \end{aligned}$$

# Soluções para a autocorrelação

- Nesta nova formulação do modelo:
  - Não existe autocorrelação pois $\epsilon_t \sim IID\left(0, \sigma_\epsilon^2\right)$
  - Ao incluir-se um desfasamento de algumas variáveis, o modelo passa a estar definido apenas para $t \geq 2$
  - A observação perdida pode ser recuperada como:

$$\underbrace{\sqrt{1-\rho^2}Y_1}_{Y_1^*} = \beta_0\sqrt{1-\rho^2} + \beta_1\underbrace{\sqrt{1-\rho^2}X_1}_{X_1^*} + \underbrace{\sqrt{1-\rho^2}u_1}_{\epsilon_1}$$

  - Para construir as variáveis transformadas é necessário obter previamente uma estimativa de $\rho \rightarrow$ Mínimos Quadrados Generalizados Admissíveis

# Soluções para a autocorrelação

- Válido apenas assimptoticamente
- Duas versões:
  - Cochrane-Orcutt: omite a primeira observação
  - Prais-Winsten: considera todas as observações
- Processo iterativo para estimar $\rho$:
  1. Estimar o modelo original $Y_t = \beta_0 + \beta_1 X_{t1} + ... + \beta_k X_{tk} + u_t$
  2. Calcular os resíduos $\hat{u}_t = Y_t - \hat{Y}_t = Y_t - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 X_{t1} - ... - \hat{\beta}_k X_{tk}$
  3. Estimar $\hat{u}_t = \rho \hat{u}_{t-1} + \epsilon_t$
  4. Estimar o modelo transformado usando o $\hat{\rho}$ obtido no $3^o$ passo;
  5. Com os $\hat{\beta}$'s estimados no $4^o$ passo, reiniciar o processo a partir do $2^o$ passo até que os $\rho$'s estimados em duas iterações sucessivas forem, de acordo com o critério definido, idênticos

# Soluções para a autocorrelação

2. Acrescento de lags no modelo para obter um modelo dinamicamente completo

Efeito do acrescento de lags: exemplos

**Modelo dinâmico AR(1) com autocorrelação AR(1)**

- Modelo:

$$\begin{aligned} Y_t &= \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + u_t, \\ u_t &= \rho u_{t-1} + \epsilon_t,\ \epsilon_t \sim IID\left(0, \sigma_\epsilon^2\right),\ \ |\rho| < 1. \end{aligned}$$

- Escrever o modelo em função de $\epsilon_t$:

$$Y_{t-1} = \beta_0 + \beta_1 Y_{t-2} + u_{t-1} \Leftrightarrow u_{t-1} = Y_{t-1} - \beta_0 - \beta_1 Y_{t-2}$$

$$u_t = \rho u_{t-1} + \epsilon_t = \rho Y_{t-1} - \rho\beta_0 - \rho\beta_1 Y_{t-2} + \epsilon_t$$

$$\begin{aligned} Y_t &= \beta_0 + \beta_1 Y_{t-1} + \rho Y_{t-1} - \rho\beta_0 - \rho\beta_1 Y_{t-2} + \epsilon_t \\ Y_t &= \underbrace{\beta_0 (1-\rho)} + (\rho + \beta_1)\, Y_{t-1} \underbrace{-\rho\beta_1}\, Y_{t-2} + \epsilon_t \end{aligned}$$

- Nesta nova formulação, *em que se acrescentou um desfasamento de* $Y$, não existe autocorrelação, pois $\epsilon_t \sim IID\left(0, \sigma_\epsilon^2\right)$

# Soluções para a autocorrelação

**Modelo dinâmico AR(1) com autocorrelação AR(2)**

- Modelo:

$$\ldots,\ u_t = \rho_1 u_{t-1} + \rho_2 u_{t-2} + \epsilon_t,\ \epsilon_t \sim IID\left(0, \sigma_\epsilon^2\right)$$

- Escrever o modelo em função de $\epsilon_t$:

$$\begin{aligned}
Y_{t-1} &= \beta_0 + \beta_1 Y_{t-2} + u_{t-1} \Leftrightarrow u_{t-1} = Y_{t-1} - \beta_0 - \beta_1 Y_{t-2} \\
Y_{t-2} &= \beta_0 + \beta_1 Y_{t-3} + u_{t-2} \Leftrightarrow u_{t-2} = Y_{t-2} - \beta_0 - \beta_1 Y_{t-3} \\
&\ldots \\
Y_t &= \underbrace{\beta_0 \left(1 - \rho_1 - \rho_2\right)} + \left(\rho_1 + \beta_1\right) Y_{t-1} + \left(\rho_2 - \rho_1 \beta_1\right) Y_{t-2} \\
&\quad \underbrace{-\rho_2 \beta_1} Y_{t-3} + \epsilon_t
\end{aligned}$$

- Nesta nova formulação, *em que se acrescentaram dois desfasamentos de $Y$*, não existe autocorrelação, pois $\epsilon_t \sim IID\left(0, \sigma_\epsilon^2\right)$

# Soluções para a autocorrelação

O exemplo mostra que o problema de autocorrelação desaparece se:

- Forem acrescentados desfasamentos a todas as variáveis do modelo, incluindo a variável dependente
- O número de desfasamentos acrescentados a cada variável corresponder à ordem do processo de autocorrelação que caracteriza o modelo original

Em termos práticos:

- Não se conhece com certeza se existe autocorrelação e, existindo, qual a sua ordem
- A solução passa por ir acrescentado desfasamentos ao modelo e, após a sua estimação, testar se existe autocorrelação. Quando deixar de existir autocorrelação, então já foi acrescentado o número de desfasamentos suficiente para resolver o problema de autocorrelação e o modelo já se tornou dinamicamente completo

# Soluções para a autocorrelação

## Exemplo: confiança do consumidor em Portugal

```
. reg cc1 unemp L.cc1 L.unemp

      Source |       SS       df       MS              Number of obs =      79
-------------+------------------------------           F(3, 75)      =  313.31
       Model |  5677.30236     3  1892.43412           Prob > F      =  0.0000
    Residual |  453.012125    75  6.04016167           R-squared     =  0.9261
-------------+------------------------------           Adj R-squared =  0.9231
       Total |  6130.31449    78  78.5937755           Root MSE      =  2.4577

------------------------------------------------------------------------------
         cc1 |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
       unemp |  -1.619056   1.052206    -1.54   0.128    -3.715157    .4770449
             |
         cc1 |
         L1. |   .9335196    .054141    17.24   0.000     .8256653    1.041374
             |
       unemp |
         L1. |   1.433666   1.028628     1.39   0.168    -.6154668    3.482798
             |
       _cons |  -3.605968   2.687144    -1.34   0.184    -8.959033    1.747098
------------------------------------------------------------------------------

. predict uhat1, resid
```

# Soluções para a autocorrelação

```
. reg uhat1 L.uhat1
      Source |       SS           df       MS      Number of obs   =        78
-------------+----------------------------------   F(1, 76)        =      0.59
       Model |  3.44192247         1  3.44192247   Prob > F        =    0.4464
    Residual |  446.524834        76  5.87532676   R-squared       =    0.0076
-------------+----------------------------------   Adj R-squared   =   -0.0054
       Total |  449.966756        77  5.84372411   Root MSE        =    2.4239

------------------------------------------------------------------------------
       uhat1 |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
       uhat1 |
         L1. |  -.0878209   .1147396    -0.77   0.446    -.3163446    .1407028
             |
       _cons |  -.0251342   .2744797    -0.09   0.927    -.5718079    .5215394
------------------------------------------------------------------------------
```

Não se rejeita $H_0$ de ausência de autocorrelação. O modelo incluindo os lags é dinamicamente completo.

De seguida apresentam-se os estimadores de Prais-Winsten e Cochane-Orcutt com o modelo estático, para ilustrar os comandos

# Soluções para a autocorrelação

```
. prais cc1 unemp
…
Prais-Winsten AR(1) regression -- iterated estimates
      Source |       SS           df       MS      Number of obs   =        80
-------------+----------------------------------   F(1, 78)        =     66.44
       Model |  386.992482         1  386.992482   Prob > F        =    0.0000
    Residual |  454.293874        78  5.82428043   R-squared       =    0.4600
-------------+----------------------------------   Adj R-squared   =    0.4531
       Total |  841.286356        79  10.6491944   Root MSE        =    2.4134

------------------------------------------------------------------------------
         cc1 |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
       unemp |  -1.558921   .8579676    -1.82   0.073    -3.267004    .1491607
       _cons |  -62.86105   7.104822    -8.85   0.000    -77.00566   -48.71644
-------------+----------------------------------------------------------------
         rho |    .947412
------------------------------------------------------------------------------
Durbin-Watson statistic (original)    0.218571
Durbin-Watson statistic (transformed) 2.187046
```

# Soluções para a autocorrelação

```
. prais cc1 unemp, corc
…
Cochrane-Orcutt AR(1) regression -- iterated estimates
      Source |       SS           df       MS      Number of obs   =        79
-------------+----------------------------------   F(1, 77)        =      3.65
       Model |  21.4916817         1  21.4916817   Prob > F        =    0.0599
    Residual |  453.756859        77  5.89294623   R-squared       =    0.0452
-------------+----------------------------------   Adj R-squared   =    0.0328
       Total |  475.248541        78  6.09293002   Root MSE        =    2.4275
------------------------------------------------------------------------------
         cc1 |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
       unemp |  -1.675038   .8771134    -1.91   0.060    -3.421594    .0715177
       _cons |  -61.10983   7.972274    -7.67   0.000    -76.98465     -45.235
-------------+----------------------------------------------------------------
         rho |   .9427111
------------------------------------------------------------------------------
Durbin-Watson statistic (original)    0.218571
Durbin-Watson statistic (transformed) 2.169623
```

# Heteroscedasticidade

Considere-se o modelo

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 z_t + \beta_2 y_{t-1} + \beta_3 z_{t-1} + u_t$$

Com a falha do pressuposto 4':

$$Var(u_t|\boldsymbol{x}_t) = Var(u_t|z_t, y_{t-1}, z_{t-1}) = Var(y_t|z_t, y_{t-1}, z_{t-1}) = \sigma^2 h(\boldsymbol{x}_t)$$

Consequências sobre o estimador e inferência OLS:

- Estimadores centrados (ex. estrita) ou consistentes (dependência fraca)
- Variância e inferência standard incorrectas

Teste BP - $H_0: Var(u_t|z_t, y_{t-1}, z_{t-1}) = \sigma^2$ (válido sem autocorrelação)

- Regressão auxiliar: $\hat{u}^2 = \gamma_0 + \gamma_1 z_t + \gamma_2 y_{t-1} + \gamma_3 z_{t-1} + e$, $R^2_{\hat{u}^2}$
- Estatística de teste e distribuição:

$$F = \frac{R^2_{\hat{u}^2}/3}{\left(1 - R^2_{\hat{u}^2}\right)/(N-3-1)} \sim F(3, N-3-1)$$

*ou*

$$LM = NR^2_{\hat{u}^2} \sim X^2_3$$

# Heteroscedasticidade

Considere-se o AR(1)

$$y_t = \alpha_0 + \alpha_1 y_{t-1} + u_t.$$

Com homoscedasticidade $Var(u_t|y_{t-1}) = Var(y_t|y_{t-1}) = \sigma^2$

Assim, ainda que $E(y_t|y_{t-1})$ dependa de $y_{t-1}$, a $Var(y_t|y_{t-1})$ não depende.

Considere-se o modelo estático

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 z_t + u_t.$$

Com homoscedasticidade $Var(u_t|z_t) = Var(y_t|z_t) = \sigma^2$

# Heteroscedasticidade

## Exemplo: confiança do consumidor em Portugal

```
. tsset t
        time variable:  t, 1 to 80
                delta:  1 unit
. reg cc1 unemp L.cc1 L.unemp
...
. predict uhat1, resid
(3 missing values generated)
. gen uhat2=uhat1^2
(3 missing values generated)
. reg uhat2 unemp L.cc1 L.unemp
      Source |       SS            df       MS      Number of obs   =        79
-------------+----------------------------------   F(3, 75)        =      0.98
       Model |  284.167696          3  94.7225654   Prob > F        =    0.4084
    Residual |  7273.64477         75  96.9819303   R-squared       =    0.0376
-------------+----------------------------------   Adj R-squared   =   -0.0009
       Total |  7557.81247         78  96.8950317   Root MSE        =    9.8479
------------------------------------------------------------------------------
       uhat2 |      Coef.   Std. Err.      t    P>|t|     [95% Conf. Interval]
-------------+----------------------------------------------------------------
       unemp |   .2177911   4.216205     0.05   0.959     -8.18132    8.616902
             |
         cc1 |
         L1. |   .3186765   .2169437     1.47   0.146    -.1134975    .7508504
             |
       unemp |
         L1. |   1.613013    4.12173     0.39   0.697    -6.597894    9.823921
             |
                                            3   0.119    -4.454794    38.44485
```

# Heteroscedasticidade

**Procedimento com potencial de autocorrelação e de heteroscedasticidade:**

- Testar autocorrelação usando versões robustas à heteroscedasticidade
- Corrigir a autocorrelação, caso exista
- Testar heteroscedasticidade